CAPíTULO 13

A Função Gama e as Funções de Bessel

13.1. A Função Gama

Você deve lembrar da definição da função fatorial para n natural positivo

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$$

(além disso, convenciona-se que $0! = 1$). A função fatorial é útil para escrever alguns produtórios de números inteiros de forma resumida:

Exemplo 90.

$$\begin{aligned} \prod_{k=4}^{12} k &= 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot ... \cdot 12 = \frac{12!}{3!} \\ 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ... \cdot 48 &= \prod_{k=2:2}^{48} k = \prod_{n=1}^{24} (2n) = 2^{24} \cdot 24! \\ 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2a+1) &= \frac{(2a+1)!}{2 \cdot 4 \cdot ... \cdot (2a)} = \frac{(2a+1)!}{2^a \cdot a!} \end{aligned}$$

E se n não for inteiro? Existe algo como $\frac{1}{2}!$? Sim! A função Gama é uma extensão do fatorial para números reais:

Definição 91. *Para $x > 0$, definimos a função $\Gamma(x)$ como*

$$\boxed{\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt}$$

Proposição 92. *Sempre que as integrais acima convergirem (ou seja, para $p > 0$), vale*

$$\boxed{\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)}$$

Demonstração.

$$\Gamma(p+1) = \int_0^\infty t^p e^{-t} dt = \left(-t^p e^{-t}\right]_0^\infty + p \int_0^\infty t^{p-1} e^{-t} dx = (0-0) + p\Gamma(p)$$

□

Proposição 93. *Para n natural positivo, vale*

$$\boxed{\Gamma(n) = (n-1)!}$$

Demonstração. Claramente, $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1$; então

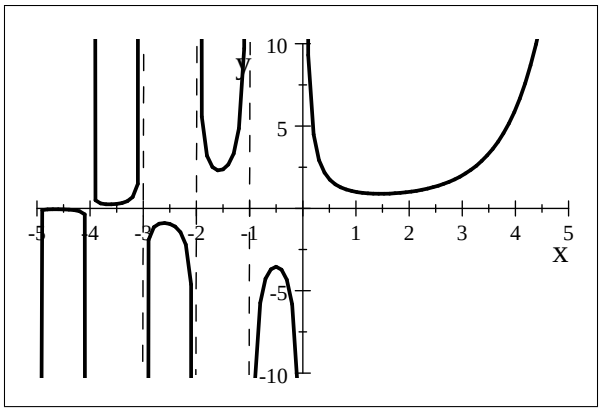
$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) = (n-1)(n-2)\Gamma(n-2) = ... = (n-1)(n-2)...1\Gamma(1) = (n-1)!$$

□

Comentário 94. *Como a integral que define $\Gamma(x)$ só converge para $x > 0$, usa-se a propriedade $\Gamma(p) = \Gamma(p+1)/p$ recursivamente para definir $\Gamma(x)$ quando $x < 0$, isto é*

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n)}{x(x+1)(x+2)(x+3)...(x+n-1)}$$

onde n é escolhido de forma que $x + n > 0$. Com esta definição, o gráfico de $\Gamma(x)$ fica assim



Em outras palavras, a função $\Gamma(x)$ *é uma generalização da função fatorial para* $x \in \mathbb{R}$ *e, portanto, cresce extremamente rápido para* $x > 2$. *Note que os inteiros negativos não estão no domínio de* $\Gamma(x)$ *– por quê?*

As propriedades acima já ajudam a escrever alguns produtórios complicados:

Exemplo 95.

$$\begin{aligned}\Gamma(20.1) &= (19.1)\cdot\Gamma(19.1) = (19.1)\cdot(18.1)\cdot\Gamma(18.1) = ... = (19.1)\cdot(18.1)\cdot...(0.1)\cdot\Gamma(0.1) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \prod_{k=0}^{19}\left(k+\frac{1}{10}\right) = (19.1)\cdot(18.1)\cdot...\cdot(0.1) = \frac{\Gamma(20.1)}{\Gamma(0.1)}\end{aligned}$$

Em geral, se n *é um natural positivo qualquer,*

$$x(x+1)(x+2)...(x+n-1) = \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)}$$

para qualquer $x \in \mathbb{R} - \{-1,-2,-3,...\}$.

Vamos agora explorar um pouco mais as propriedades da função gama.

Proposição 96. *Temos*

$$\boxed{\int_0^\infty e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

$$\boxed{\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}}$$

Demonstração. Seja I a integral imprópria acima. Então

$$\begin{aligned}I^2 &= \left(\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right)\left(\int_0^\infty e^{-y^2}dy\right) = \int_{R^2} e^{-x^2-y^2}dA = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty e^{-r^2}rdrd\theta = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{e^{-r^2}}{2}\right]_0^\infty d\theta = \frac{\pi}{2}\left(0+\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\end{aligned}$$

Portanto

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt = \int_0^\infty \frac{1}{u}e^{-u^2}(2udu) = \int_0^\infty 2e^{-u^2}du = 2\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$$

□

Neste momento, fica fácil calcular alguns fatoriais "novos":

Exemplo 97.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}! &= \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \\ \frac{5}{2}! &= \frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}! = \frac{15\sqrt{\pi}}{8}\end{aligned}$$

A proposição a seguir dá algumas definições alternativas da função Gama (sendo a primeira delas a definição utilizada por Euler no século XVIII):

PROPOSIÇÃO 98. *Temos*

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)(x+2)...(x+n)} = \frac{1}{x}\prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{1+\frac{x}{n}}$$

e portanto

$$\Gamma(x) = \frac{e^{-\gamma x}}{x}\prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^{x/n}}{1+\frac{x}{n}}$$

onde $\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) - \ln n\right) \approx 0.57722...$ *é a* constante de Euler.

DEMONSTRAÇÃO. Nos exercícios abaixo, indicamos como mostrar estas igualdades para x natural. O caso geral não será demonstrado aqui. □

Outras propriedades que citaremos sem demonstração incluem:

PROPOSIÇÃO 99. *A função Gama satisfaz a* fórmula de reflexão

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x} \text{ para } x \notin \mathbb{Z}$$

e a fórmula de duplicação

$$2^{2x-1}\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\Gamma(2x)$$

Uma conseqüência importante da primeira fórmula acima é que a função Gama não tem zeros reais (nem complexos). Uma **importante** aproximação da função Gama, válida para valores altos de x, é a seguinte:

PROPOSIÇÃO 100 (Fórmula de Stirling). *Tem-se*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\Gamma(x+1)}{x^x e^{-x}\sqrt{x}} = \sqrt{2\pi}$$

isto é, neste sentido,

$$\Gamma(x+1) \approx \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x \text{ para } x \text{ suficientemente grande}$$

13.2. Funções de Bessel

Assim como a EDO de Euler aparece ao resolver a Equação de Laplace em coordenadas polares no plano, uma outra EDO aparece ao atacar as equações clássicas em coordenadas cilíndricas ou esféricas. Esta EDO é a *Equação de Bessel* (de ordem $p \geq 0$):

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - p^2\right)y = 0$$

Utilizamos o Método de Frobenius para encontrar soluções desta EDO. Lembre que o método de Frobenius consiste em procurar uma solução da forma

$$y(x) = x^s\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s}$$

onde $a_0 \neq 0$ e s é uma constante a ser escolhida mais tarde. Então[1]

$$\begin{aligned} y'(x) &= \sum (n+s)\, a_n x^{n+s-1} \\ y''(x) &= \sum (n+s)(n+s-1)\, a_n x^{n+s-2} \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} x^2y'' + xy' &= x^s\sum (n+s)(n+s-1)\, a_n x^n + x^s\sum (n+s)\, a_n x^n = x^s\sum (n+s)^2\, a_n x^n \\ -p^2y &= x^s\sum -p^2 a_n x^n \\ x^2y &= x^s\sum a_n x^{n+2} = x^s\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^n \end{aligned}$$

Substituindo tudo na EDO de Bessel (e dividindo por x^s), encontramos as seguintes equações nos coeficientes a_n:

$$\begin{aligned} \text{Tomando } n &= 0\text{: } \left(s^2 - p^2\right)a_0 = 0 \\ \text{Tomando } n &= 1\text{: } \left((s+1)^2 - p^2\right)a_1 = 0 \\ \text{Outros valores de } n &\geq 2\text{: } \left((s+n)^2 - p^2\right)a_n + a_{n-2} = 0 \end{aligned}$$

[1] Nas linhas a seguir, somatórios sem índices são de $n = 0$ até ∞.

Ou seja, da primeira equação (lembrando que $a_0 \neq 0$) temos $s = \pm p$. Para encontrar a primeira solução, usamos então $s = p$. Da segunda equação, vem $a_1 = 0$. Enfim, a terceira equação dá a recorrência

$$a_n = \frac{-a_{n-2}}{n\left(2p+n\right)} \text{ ou } a_{n+2} = \frac{-a_n}{\left(n+2\right)\left(2p+n+2\right)}$$

ou seja, os coeficientes de ordem ímpar serão todos nulos; os de ordem par são:

$$\begin{aligned} a_{2k} &= \frac{-a_{2k-2}}{2k\left(2p+2k\right)} = \frac{a_{2k-4}}{2k\left(2k-2\right)\left(2p+2k\right)\left(2p+2k-2\right)} = ... \\ ... &= \frac{\left(-1\right)^k a_0}{\left(2k\left(2k-2\right)\left(2k-4\right)...4.2\right)\left(\left(2p+2k\right)\left(2p+2k-2\right)...\left(2p+2\right)2p\right)} \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad a_{2k} &= \frac{\left(-1\right)^k}{2^{2k}k!\left(p+k\right)\left(p+k-1\right)...\left(p+1\right)p}a_0 = \frac{\left(-1\right)^k\Gamma\left(p\right)}{2^{2k}k!\Gamma\left(p+k+1\right)}a_0 \end{aligned}$$

Enfim, voltando à fórmula de $y\left(x\right)$, ficamos com

$$y\left(x\right) = x^p a_0 \Gamma\left(p\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^k}{2^{2k}k!\Gamma\left(p+k+1\right)}x^{2k}$$

Para facilitar as contas, é comum escolher uma solução tomando $a_0 = \frac{1}{\Gamma(p)2^p}$. Com esta escolha, finalmente chegamos a:

DEFINIÇÃO 101. *A função de Bessel de primeira espécie de ordem p é a função definida pela seguinte série de potências*

$$J_p\left(x\right) = \left(\frac{x}{2}\right)^p\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{n!\Gamma\left(n+p+1\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

Se p é inteiro, esta função está definida para todo x real[2]*; se p não for inteiro, a definição só faz sentido*[3] *para* $x \geq 0$.

EXEMPLO 102. *O caso mais comum é o caso em que p é natural:*

$$J_p\left(x\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{n!\left(n+p\right)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}$$

É imediato escrever alguns exemplos

$$\begin{aligned} J_0\left(x\right) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{\left(n!\right)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n} = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} - \frac{x^6}{2304} + ... \\ J_1\left(x\right) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{n!\left(n+1\right)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1} = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{16} + \frac{x^5}{384} - \frac{x^7}{18432} + ... \\ J_2\left(x\right) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{n!\left(n+2\right)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+2} = \frac{x^2}{8} - \frac{x^4}{96} + \frac{1}{3072}x^6 - \frac{1}{184320}x^8 + ... \end{aligned}$$

enquanto

$$\begin{aligned} J_{-1}\left(x\right) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{n!\left(n-1\right)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-1} = -\frac{x}{2} + \frac{x^3}{16} - \frac{x^5}{384} + \frac{x^7}{18432} - ... \\ J_{-2}\left(x\right) &= \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{n!\left(n-2\right)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-2} = \frac{x^2}{8} - \frac{x^4}{96} + \frac{1}{3072}x^6 - \frac{1}{184320}x^8 + ... \end{aligned}$$

pois os termos que apresentam $(-1)!$ *ou* $(-2)!$ *no denominador são simplesmente descartados.*

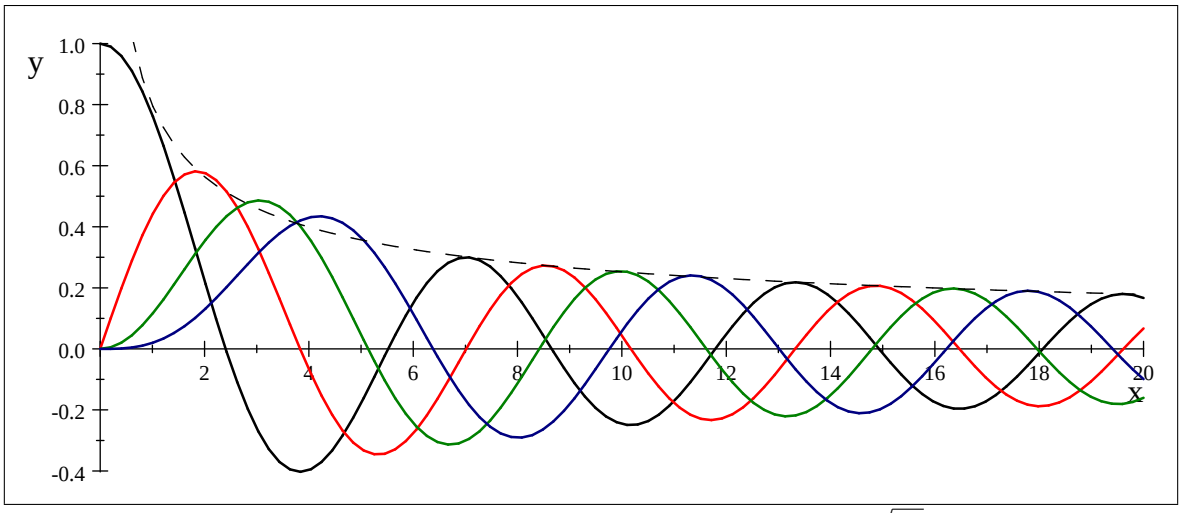
---

[2]Desde que seja usada a convenção $\frac{1}{\Gamma(n)} = 0$ sempre que n for inteiro negativo ou nulo.

[3]Aplicando o Teste da razão à série de potências, encontramos

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \left(\frac{x}{2}\right)^2\frac{1}{\left(n+1\right)\left(n+p+1\right)} \to 0$$

quando $n \to \infty$. Assim, o raio de convergência da série de potências é $+\infty$. O problema com o domínio de $J_p\left(x\right)$ não está na série, mas na presença do termo x^p.



As funções de Bessel de ordem $0, 1, 2$ e 3 e a função $\sqrt{\frac{2}{\pi x}}$

Note nos gráficos que as funções de Bessel são oscilantes[4] (apesar de suas raízes, em geral, não estarem igualmente espaçadas) e têm decaimento semelhante a $\frac{1}{\sqrt{x}}$. Outras curiosidades do gráfico (a serem demonstradas nos exercícios) são:

- Nos valores de x onde o gráfico de J_p corta o eixo x, as funções "adjacentes"J_{p+1} e J_{p-1} são simétricas.
- Nos valores de x onde o gráfico de J_p tem um mínimo ou máximo local, os gráficos das funções "adjacentes"J_{p+1}e J_{p-1} se cortam.

Deixamos as seguintes propriedades como exercícios para o leitor:

PROPOSIÇÃO 103. *Se p é inteiro par, então $J_p(x)$ é uma função par. Se p é inteiro ímpar, então $J_p(x)$ é uma função ímpar.*

PROPOSIÇÃO 104. *Se p é um inteiro positivo, então $J_p(x) = (-1)^p J_{-p}(x)$.*

PROPOSIÇÃO 105. $J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x$ *e* $J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$.

PROPOSIÇÃO 106. *Vale a seguinte recorrência*

$$\frac{2p}{x} J_p(x) = J_{p-1}(x) + J_{p+1}(x)$$

Já as derivadas das funções de Bessel são dadas por:

PROPOSIÇÃO 107. *Vale a seguinte relação*

$$2J_p'(x) = J_{p-1}(x) - J_{p+1}(x)$$

Em particular, tomando $p = 0$ na segunda equação, vem

$$J_0'(x) = -J_1(x)$$

As proposições acima permitem calcular J_{p+1} e J_p' em função de J_p e J_{p-1}; em particular, qualquer função $J_n(x)$, assim como **todas** as suas derivadas, podem ser expressas em função de J_0 e J_1!

Por outro lado, para calcular integrais que contenham as funções de Bessel, as próximas relações são úteis:

PROPOSIÇÃO 108. *A partir das relações acima, é fácil mostrar que*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x^p J_p) &= x^p J_{p-1} \\ \frac{d}{dx}(x^{-p} J_p) &= -x^{-p} J_{p+1} \end{aligned}$$

[4]Intuitivamente, este comportamento oscilante ocorre pois, fazendo $z = \sqrt{x}y$, a EDO de Bessel em $z(x)$ é

$$z'' + z = \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{4} - p^2\right) z.$$

Para x grande, esta equação é essencialmente $z'' + z = 0$, cujas soluções são $\sin x$ e $\cos x$ (e suas combinações).

Enfim, voltemos à EDO de Bessel original

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - p^2\right) y = 0$$

De fato, tanto $J_p(x)$ como $J_{-p}(x)$ são soluções desta equação. No caso em que p não é inteiro, pode-se mostrar que estas soluções são linearmente independentes (pois $J_p(0) = 0$ enquanto $J_{-p}(0)$ é ilimitada), e a solução geral desta EDO é simplesmente

$$y(x) = c_1 J_p(x) + c_2 J_{-p}(x)$$

No entanto, no caso em que p é inteiro, as funções J_p e J_{-p} são idênticas (a menos possivelmente de um sinal)! Assim, precisamos de uma segunda solução, que é exatamente a *função de Bessel de segunda espécie*, chamada de $Y_p(x)$. Assim, para p inteiro, a solução geral da EDO de Bessel é

$$y(x) = c_1 J_p(x) + c_2 Y_p(x)$$

Não abordaremos a função $Y_p(x)$ neste texto; citaremos apenas que para p inteiro temos $\lim_{x\to 0^+} Y_p(x) = -\infty$. Como J_{-p} também é ilimitada perto de $x = 0$, temos:

PROPOSIÇÃO 109. *Seja $p \geq 0$. As únicas soluções* ***limitadas próximas de*** $x = 0$ *da* ***EDO de Bessel Paramétrica de Ordem*** p

$$x^2y'' + xy' + \left(\lambda^2x^2 - p^2\right) y = 0$$

são

$$y(x) = c_1 J_p(\lambda x)$$

DEMONSTRAÇÃO. Verifique que a solução geral desta EDO é $y(x) = c_1 J_p(\lambda x) + c_2 Y_p(\lambda x)$ (ou, se o leitor preferir, $y(x) = c_1 J_p(\lambda x) + c_2 J_{-p}(\lambda x)$ no caso em que p não é inteiro). Como só queremos soluções limitadas próximas de $x = 0$, o resultado segue imediatamente. □

EXEMPLO 110 (Ondas Estacionárias no Tambor). *Uma onda numa membrana pode ser representada por uma função $u(x, y, t)$ onde u é a altura da deformação desta membrana no ponto de coordenadas (x, y) no instante t. Nestas coordenadas, a Equação da Onda é*

$$u_{tt} = c^2\Delta u = c^2\left(u_{xx} + u_{yy}\right)$$

Se a membrana é um disco, pode ser mais útil trabalhar em coordenadas polares. Assim, procuramos uma função $u(r, \theta, t)$ que satisfaça

$$u_{tt} = c^2\Delta u = c^2\left(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}\right)$$

Nomralizemos a equação tomando $c = 1$ e procuremos as soluções separadas desta equação. Tomando $u(r, \theta, t) = R(r)\Theta(\theta)T(t)$, vem

$$R\Theta T'' = R''\Theta T + \frac{R'\Theta T}{r} + \frac{R\Theta''T}{r^2} \Rightarrow \frac{T''}{T} = \frac{R''}{R} + \frac{R'}{rR} + \frac{\Theta''}{r^2\Theta}$$

Assim, temos as seguintes EDOs:

$$\begin{cases} T'' = -\lambda_1 T \\ \Theta'' = -\lambda_2\Theta \\ r^2R'' + rR' + \left(\lambda_1 r^2 - \lambda_2\right) R = 0 \end{cases}$$

Façamos mais uma simplificação: vamos procurar apenas soluções oscilatórias, isto é, soluções que sejam periódicas em t. Então temos $\lambda_1 = \lambda^2 \geq 0$ (evitando exponenciais em t); por outro lado, se o domínio for $\theta \in \mathbb{R}$, é necessário[5] *que $\Theta(\theta)$ seja uma função de período 2π, isto é, $\lambda_2 = p^2$ onde $p = 0, 1, 2, \ldots$. Assim, a equação em $R(r)$ é*

$$r^2R'' + rR' + \left(\lambda^2r^2 - p^2\right) R = 0$$

ou seja, uma EDO de Bessel de ordem p. Como p é inteiro, as soluções desta EDO são

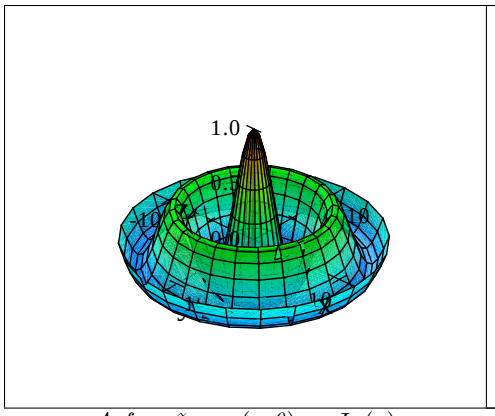
$$R(r) = c_1 J_p(\lambda r) + c_2 Y_p(\lambda r)$$

mas, se quisermos apenas soluções que não "explodam"no centro do tambor ($r = 0$), temos de jogar fora a componente Y_p. Juntando tudo, encontramos soluções separadas da forma

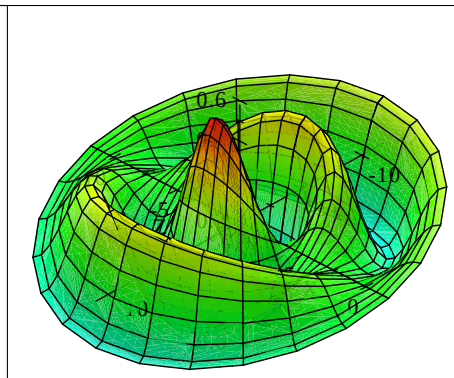
$$u_{p,\lambda}(r, \theta, t) = J_p(\lambda r)\left(c_1\cos p\theta + c_2\sin p\theta\right)\left(c_3\sin\lambda t + c_4\cos\lambda t\right) = cJ_p(\lambda r)\cos\left(p\theta + \theta_0\right)\cos\left(\lambda t + \phi_0\right)$$

[5] Caso o domínio em θ seja restrito (algo como $0 \leq \theta \leq \pi$, por exemplo), então condições de contorno decidiriam os possíveis valores de λ_2.

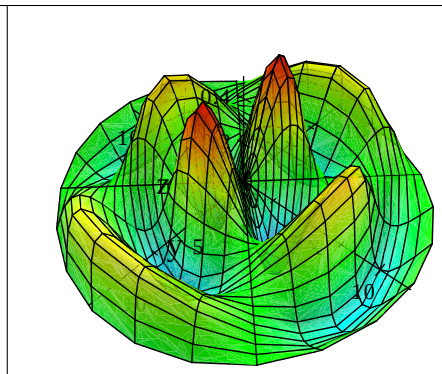
As figuras abaixo ilustram algumas destas soluções (normalizadas tomando $c = \lambda = 1$ e $\theta_0 = \phi_0 = 0$; as soluções são ilustradas no tempo $t = 0$):



A função $u_0(r,\theta) = J_0(r)$



A função $u_1(r,\theta) = J_1(r)\cos\theta$



A função $u_2(r,\theta) = J_2(r)\cos 2\theta$

13.3. Exercícios

1) Calcule $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$ e $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$.
Resposta: $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ e $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$.

2) Calcule $\Gamma\left(\frac{10}{3}\right)$, $\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)$ e $\Gamma\left(\frac{11}{3}\right)$ em função de $\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \simeq 2.6789$. Confira sua resposta com o auxílio de uma calculadora ou computador.
Resposta: $\Gamma\left(\frac{10}{3}\right) = \frac{28}{27}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \simeq 2.7782$; $\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \simeq 1.3541$ *e* $\Gamma\left(\frac{11}{3}\right) = \frac{80}{27}\frac{2\pi}{\sqrt{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \simeq 4.012\,2$.

3) Mostre que, para $x > 0$

$$\Gamma(x) = 2\int_0^\infty e^{-t^2} t^{2x-1} dt$$

4) Dado n natural positivo, considere

$$f_n(x) = \frac{n! n^x}{x(x+1)(x+2)...(x+n)}$$

Pode-se mostrar que $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ existe qualquer que seja x complexo (exceto quando $x = 0, -1, -2, ...$), motivando a definição de uma nova função

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

a) Calcule $f(1)$.
b) Calcule $\lim_{n\to\infty} \frac{f_n(x+1)}{f_n(x)}$ e mostre que $f(x+1) = xf(x)$ para todo x no domínio de $f(x)$. Em particular, conclua que $f(x) = \Gamma(x) = (x-1)!$ para x natural positivo.
c) Mostre que

$$f(x) = \frac{e^{-\gamma x}}{x}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{e^{x/n}}{1+\frac{x}{n}}$$

onde $\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) - \ln n\right) \approx 0.57722...$ é a constante de Euler.

5) Prove as proposições 103, 104 e 105.

6) Prove as proposições 106 e 107. Use-as para escrever as seguintes expressões em função apenas de J_0 e J_1: a) $J_2(x)$. b) $J_2'(x)$. c) $J_1''(x)$.
Respostas: a) $J_2(x) = \frac{2}{x}J_1(x) - J_0(x)$; *b)* $J_2'(x) = \frac{2}{x}J_0(x) + \frac{x^2-4}{x^2}J_1(x)$; *c)* $J_1''(x) = -\frac{1}{x}J_0(x) + \left(\frac{2}{x^2} - 1\right)J_1(x)$.

7) Prove a proposição 108.

8) Use o resultado da proposição 108 para calcular (sua resposta conterá funções de Bessel):
a) $\int J_1(x)\,dx$
b) $\int x^{p+1}J_p(x)\,dx$
c) $\int (xJ_1(x) - J_0(x))\,dx$ [Dica: partes em $\int xJ_1 dx$]
d) $\int x^4 J_1(x)\,dx$ [Dica: $dv = x^2 J_1$]
Respostas: a) $-J_0(x) + C$ *b)* $x^{p+1}J_{p+1}(x) + C$ *c)* $-xJ_0(x) + C$ *d)* $x^4 J_2(x) - 2x^3 J_3(x) + C$.

9) Mostre que

$$\begin{aligned} J_{3/2}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x^3}}(\sin x - x\cos x) \\ J_{5/2}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x^5}}\left(\left(3-x^2\right)\sin x - 3x\cos x\right) \end{aligned}$$

10) Mostre que, se $J_p(\lambda) = 0$, então $J_{p-1}(\lambda) = -J_{p+1}(\lambda)$; por outro lado, se $J_p'(\lambda) = 0$, então $J_{p-1}(\lambda) = J_{p+1}(\lambda)$.

11) Sejam α e β reais distintos.
a) Verifique que as funções $y_1(x) = J_p(\alpha x)$ e $y_2(x) = J_p(\beta x)$ satisfazem

$$\begin{aligned} x^2y_1'' + xy_1' + \left(\alpha^2x^2 - p^2\right)y_1 &= 0 \\ x^2y_2'' + xy_2' + \left(\beta^2x^2 - p^2\right)y_2 &= 0 \end{aligned}$$

b) Mostre que:

$$\frac{d\left(x\left(y_1y_2' - y_2y_1'\right)\right)}{dx} = \left(\alpha^2 - \beta^2\right)xy_1y_2$$

c) Integre esta equação de 0 a 1 para concluir que, se $\alpha \neq \beta$:

$$\int_0^1 xJ_p(\alpha x)\,J_p(\beta x)\,dx = \frac{y_1(1)\,y_2'(1) - y_2(1)\,y_1'(1)}{\alpha^2 - \beta^2}$$

isto é

$$\int_0^1 xJ_p(\alpha x)\,J_p(\beta x)\,dx = \frac{\beta J_p(\alpha)\,J_p'(\beta) - \alpha J_p'(\alpha)\,J_p(\beta)}{\alpha^2 - \beta^2}$$

12) Mostre que, se m e n são inteiros, então as funções

$$u_{m,n}(r,\theta,z) = J_n(mr)\sin(n\theta + \theta_0)\sinh(mz)$$

são soluções separadas e limitadas perto de $r = 0$ da Equação de Laplace tridimensional em coordenadas cilíndricas

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + u_{zz} = 0 \text{ para } r \geq 0,\ \theta, z \in R$$

satisfazendo a condição de contorno $u(r,\theta,0) = 0$ (nota: não são as *únicas* soluções, há outras!).